Illustration du théorème des résidus :

I Le développement

Le but de ce développement est d'utiliser le théorème des résidus afin de calculer une intégrale (a priori non calculable via les théorèmes usuels). On commence par un résultat préliminaire :

Lemme 1 : [Tauvel, p.103]
Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et a un pôle simple de f.
Si f s'écrit sous la forme $f = \frac{g}{h}$ au voisinage de a, alors on a $\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Preuve :
Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et a un pôle simple de f.
Au voisinage de a, on peut écrire la fonction f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $h(z) = (z-a)h_1(z)$ et $h_1(a) \neq 0$.

On a donc :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)h_1(z)} \underset{def.}{=} \frac{\alpha_{-1}}{z-a} + \ell(z) \text{ (avec } \ell(z) \text{ le reste de la partie principale de } f \text{ en } a)$$

D'où :

$$\operatorname{Res}(f,a) = \alpha_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{g(z)}{h_1(z)} = \frac{g(a)}{h_1(a)}$$

De $h(z) = (z-a)h_1(z)$, on a $h'(a) = h_1(a)$ et donc $\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

■

Exemple 2 : [Tauvel, p.193]
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel tel que $n > \alpha + 1 > 0$.
On a :

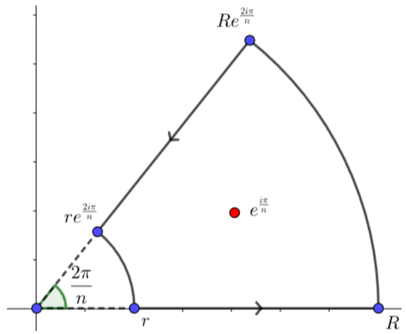
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{n}\right)}$$

Preuve :
Justifions tout d'abord que I est bien définie :
La fonction $t \longmapsto \frac{t^\alpha}{1+t^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et donc localement intégrable (donc intégrable sur $[0;1]$) et au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^{n-\alpha}}$. Donc par comparaison à une fonction positive intégrable (par le critère de Riemann car $n-\alpha > 1$), la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Ainsi, I est bien définie.

Le but de ce développement est d'utiliser le théorème des résidus afin de calculer une intégrale. Ainsi, l'objectif est de mettre en place le théorème des résidus afin de l'utiliser conjointement avec un calcul d'intégral afin de trouver la valeur de I qui nous intéresse.

Pour mettre en place le théorème des résidus, il nous faut considérer un chemin fermé, qui contient un pôle de la fonction $f : z \longmapsto \frac{z^\alpha}{1+z^n}$ (disons $e^{\frac{i\pi}{n}}$), qui ne passe pas par 0 (à cause du t^α qui fera intervenir une détermination continue du logarithme) et qui fait apparaître l'intégrale I suite à un processus limite (passage à la limite).

On considère donc le chemin $\Gamma_{r,R}$ suivant (avec $0 < r < 1 < R$) :



Puisque le chemin $\Gamma_{r,R}$ ne contient qu'un seul pôle de f, on a par le théorème des résidus que :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z &= 2i\pi \operatorname{Ind}_{\Gamma_{r,R}}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{i\pi}{n}}\right)\\ &= 2i\pi \times 1 \times \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{n}}}{ne^{\frac{i\pi(n-1)}{n}}} \text{ (car pôle simple + numérateur holomorphe en le pôle)}\\ &= \frac{2i\pi}{n}e^{\frac{-i\pi n + i\pi(\alpha+1)}{n}} = -\frac{2i\pi}{n}e^{\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}}\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{[r;R]} f(z)\mathrm{d}z}_{=I_{r,R}} + \underbrace{\int_{\delta_1} f(z)\mathrm{d}z}_{=I_1} + \int_{\left[Re^{\frac{2i\pi}{n}};re^{\frac{2i\pi}{n}}\right]} f(z)\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\delta_2} f(z)\mathrm{d}z}_{=I_2}$$

On paramétrise les chemins δ_1 et δ_2 respectivement via :

$$\varphi_1 : \left|\begin{array}{ccc} [0;\frac{2\pi}{n}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \left|\begin{array}{ccc} [\frac{2\pi}{n};0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & re^{it}\end{array}\right.$$

On a alors :

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{t^\alpha}{1+t^n}\mathrm{d}t + iR^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+R^n e^{int}}\mathrm{d}t + e^{\frac{2i\pi}{n}}\int_R^r \frac{t^\alpha e^{\frac{2i\pi\alpha}{n}}}{1+t^n}\mathrm{d}t$$
$$+ ir^{\alpha+1}\int_{\frac{2\pi}{n}}^0 \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+r^n e^{int}}\mathrm{d}t$$
$$= \left(1-e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}}\right) I_{r,R} + iR^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+R^n e^{int}}\mathrm{d}t$$
$$- ir^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+r^n e^{int}}\mathrm{d}t$$

Or, on a :

$$|I_1| \underset{2^{de}\ I.T.}{\leq} R^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\mathrm{d}t}{|R^n-1|} = \frac{2\pi}{n}\frac{R^{\alpha+1}}{|R^n-1|} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } n > \alpha+1)$$

$$|I_2| \underset{2^{de}\ I.T.}{\leq} r^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\mathrm{d}t}{|r^n-1|} = \frac{2\pi}{n}\frac{r^{\alpha+1}}{|r^n-1|} \underset{r\to0}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } \alpha+1 > 0)$$

On peut donc passer à la limite et on obtient que :

$$\left(1-e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}}\right) I = \lim_{r\to0, R\to+\infty}\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{2i\pi}{n}e^{\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}}$$

D'où :

$$I = \frac{-2i\pi}{n}\frac{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}}{1-e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}}} = \frac{2i\pi}{n}\frac{1}{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}} - e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{n}\right)}$$

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé la notion de résidu dont on rappelle la définition :

Définition 3 : Résidu d'une fonction [Tauvel, p.102] :
On considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ un pôle d'ordre m de f.
La partie principale de f en a est : $P(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_{-k}(z-a)^k$. On appelle **résidu de f en a** la quantité α_{-1}.

Lemme 4 : [Tauvel, p.102]
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé dans Ω et $a \in \Omega$ un pôle d'ordre m en f.
Si $a \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, alors $\int_\gamma P(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$.

Preuve :
On a directement (en utilisant le fait que les intégrales de z^n sont nulles pour $n < -1$ et $0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$) que :

$$\int_\gamma P(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma a_{-1}\frac{\mathrm{d}z}{z-a} = a_{-1}\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$$

■

On a également utilisé le théorème des résidus (dont la démonstration repose sur la formule de Cauchy sur un convexe ainsi que sur la notion de partie principale) dont on rappelle l'énoncé ci-dessous :

Théorème 5 : Théorème des résidus [Tauvel, p.103]
Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de Ω qui sont des pôles de f et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a_1, .., a_n\})$.
Si γ est un chemin fermé sur Ω dont l'image ne contient aucun des a_k, alors on a :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi\sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k)$$

II.2 Remarques

On remarque que pour $\alpha = 0$ et $n \geq 2$, le résultat précédent nous donne (pour $r = 0$) :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (*)$$

Donc en particulier pour $n = 2$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}$$

On retrouve bien le résultat usuel en calculant l'intégrale par primitive via l'arc tangente.

Il est également possible de calculer $(*)$ via une décomposition en éléments simples mais cette méthode est beaucoup plus fastidieuse à mettre en place !

II.3 Recasages

Recasages : 236 - 245.

III Bibliographie

— Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.